

2ch 東大レベル模試

2ch 東大レベル模試実行委員会

2005年2月11日(祝)

問題1 n を自然数とする. サイコロを $2n$ 回投げて n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき, $p_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ であることを示せ.

問題2 2行3列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 3行2列の行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ および $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ があ

る. これらの行列の可能な $2n$ 個の積

$X_1 X_2 \cdots X_{2n}$, $X_i = A, B$ または C

を考える. ただし, n は自然数.

- (1) どの X_i も C でないとき, $X_1 X_2 \cdots X_{2n}$ を n で表せ.
- (2) X_i の少なくとも1つが C のとき, $X_1 X_2 \cdots X_{2n}$ を n で表せ.

問題3 $(-1, 1)$ を焦点, $3x + 4y = 0$ を準線とする放物線と y 軸で囲まれた部分を, y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

問題4 本問では複素数 z が表す複素数平面上的の点のことも, 単に点 z と呼ぶことにする. T を複素数平面上的の図形, α, β を複素数平面上的の点とする. このとき $a + b + c = 1, a \neq 0$ を満たす実数の定数 a, b, c に対して $T' = \{az + b\alpha + c\beta \mid z \in T\}$ とする.

- (1) T が中心 γ , 半径 d の円周であるとき, T' はいかなる図形か.
- (2) T が点 β を通る直線であるとき, T' が T に一致することがあるか. あるならそのような T をすべて求め, ないならないことを証明せよ.

問題5 四角形 $ABCD$ が半径1の円に内接していて, $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0, \vec{AB} + \vec{AD} + 2(\vec{CB} + \vec{CD}) = \vec{0}$ を満たす. このとき辺 BC の長さを求めよ.

問題6 無限数列 $f(1), f(2), f(3), \dots$ は次の(ア)から(ウ)を満たす.

- (ア) 任意の正の整数 m, n に対して, $f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つ.
- (イ) 任意の正の整数 n に対して, $f(n) < f(n+1)$ が成り立つ.
- (ウ) $f(2) = 2$.

このとき,

- (1) 任意の正の整数 n, k に対して, 次のような非負整数 p があることを示せ. $2^p \leq n^k < 2^{p+1}$
- (2) 任意の正の整数 n に対して, $f(n) = n$ であることを示せ.