東大模試

1. x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ について, 方程式 $f(x)=x$ の解が $x=-3$ と $x=2$ であるとき, 方程式 $f(f(x))=x$ を解け.

2.

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ は $0<x<\pi/2$ で単調減少関数であることを示せ.

(2) $\sin 20^\circ < 0.35$ であることを示せ.

3. 複素数平面上の直線は,0 でない複素数 α と実数 c を用いて,

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$$

の形で与えることができる.（証明は与えなくてよい)

複素数 z_1, z_2 が与える 2 点が直線 $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$ に関して対称な位置にあるならば

$$\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2+c=0$$

が成り立つことを示せ.

4. 1 から N までの番号の付いた箱が左から横一列に並んでいる. そのすべての箱の中に,1 から N までの番号が付いたカードを無作為に選んで 1 枚ずつ入れる. このときすべての箱の番号と入れられたカードの番号が一致しない場合の数を a_N で表す. 例えば $N=3$ のとき条件に合うカードの並べ方は $(2,3,1),(3,1,2)$ の 2 通りであるから $a_3=2$ である.

(1) $N=4$ のとき a_4 を求めよ.

(2) $N=n$ のとき,a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ。また $N=6$ のとき, すべての箱のカードと入れられたカードの番号が一致しない確率を求めよ.

5. a, b は正の整数とする. 実数からなる数列 $\{R_n\}$ を a, b を用いて次で定義する.

$$R_n=\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n \ (n=1,2,\cdots)$$

このとき,R_n が整数値になるのは n が奇数のときに限られることを示せ.

6. a は $a>0$ を満たす定数とする. 座標空間において, 直円柱面 $C: x^2+y^2=a^2$ と直円柱 $D: y^2+z^2\leq a^2$ の共通部分 E の面積 S を求めよ.