2ch 東大レベル模試・問題と解答例

2ch 東大レベル模試実行委員会

2005 年 2 月 11 日 (祝)

問題 1　n を自然数とする．サイコロを $2n$ 回投げて n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき，$p_n \geqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4n}$ であることを示せ．

問題 1 の解答　$p_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=n}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k = \frac{1}{2\cdot 4^n}\cdot 2\sum_{k=n}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k$
$= \dfrac{1}{2\cdot 4^n}\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_k\right) = \frac{1}{2\cdot 4^n}\left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k + {}_{2n}\mathrm{C}_n\right) = \frac{1}{2\cdot 4^n}\left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k 1^k \cdot 1^{2n-k} + {}_{2n}\mathrm{C}_n\right)$
$= \dfrac{1}{2\cdot 4^n}(4^n + {}_{2n}\mathrm{C}_n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2\cdot 4^n}$ であるから $\dfrac{1}{4n} \leqq \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2\cdot 4^n}$ 即ち $4n \geqq \dfrac{2\cdot 4^n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\cdots$★ がすべての自然数で成り立つことを示せばよい．数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき $4\cdot 1 = \dfrac{2\cdot 4^1}{{}_2\mathrm{C}_1}$ であるので★は成り立つ．$n=k$ で★が成り立つなら $\dfrac{2\cdot 4^{k+1}}{{}_{2k+2}\mathrm{C}_{k+1}} = \dfrac{4(k+1)}{(2k+2)(2k+1)}\cdot\dfrac{2\cdot 4^k}{{}_{2k}\mathrm{C}_k} \leqq \dfrac{4^2k(k+1)}{(2k+2)(2k+1)} = \{4(k+1)\}\cdot\dfrac{4k}{(2k+2)(2k+1)}$ であり $(2k+2)(2k+1)-4k = 4k^2+2k^2+2 = 4\left(k^2+\dfrac{k}{2}\right)+2 = 4\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4} > 0$ であるので k が自然数であるなら $\dfrac{2\cdot 4^{k+1}}{{}_{2k+2}\mathrm{C}_{k+1}} \leqq 4(k+1)$.

問題 2　2 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,3 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ および $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ がある. これらの行列の可能な $2n$ 個の積

$X_1 X_2 \cdots X_{2n}$, $X_i = A, B$ または C

を考える. ただし, n は自然数.

(1)　どの X_i も C でないとき, $X_1 X_2 \cdots X_{2n}$ を n で表せ.

(2)　X_i の少なくとも 1 つが C のとき, $X_1 X_2 \cdots X_{2n}$ を n で表せ.

問題 2 の解答　(1)　行列 X, Y について積が可能なのは X の列数と Y の行数が一致しているときに限るので $X_1 \cdots X_{2n} = (AB)^n$ または $X_1 \cdots X_{2n} = (BA)^n$. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるので

$(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. $(BA)^n = B(AB)^{n-1}A = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 1 & -2^n \\ 1 & -2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 1-2^n & 2^n & 1-2^n \\ 1-2^{n-1} & 2^{n-1} & 1-2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(2)　$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから $(AB)^n$ の n 個の B のうち 1 つを C と入れ替えた積は $k = 0, 1, \ldots, n-1$ として $(AB)^k(AC)(AB)^{n-k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. したがって n この B のうち 1 つ以上 n 個以下の B をすべて C と入れ替えたものは $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(BA)^n$ の n 個の B のうち左端以外の B を 1 つでも C と入れ替えたものは $B(AB)^k(AC)(AB)^{n-2-k}A$ だから $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 左端だけを入れ替えたものは

$C(AB)^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 \\ -1 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-2^{n-1} & 2^{n-1} & 1-2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+2^{n-1} & -2^{n-1} & -1+2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

問題 3　$(-1,1)$ を焦点,$3x+4y=0$ を準線とする放物線と y 軸で囲まれた部分を,y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

問題 3 の解答　$\tan\theta=\dfrac{3}{4}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ は $\cos\theta=\dfrac{4}{5}, \sin\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす. 複素数平面において $(\cos\theta+i\sin\theta)(-1+i)=(-\cos\theta-\sin\theta)+i(\cos\theta-\sin\theta)=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i$ であるから点 $(-1,1), 3x+4y=0, y$ 軸は, 原点を中心に θ だけ回転させることによりそれぞれ点 $\left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$, x 軸, $4x+3y=0$ に移る. 焦点を $\left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$, 準線を x 軸とする放物線は焦点を $\left(0,\ \dfrac{1}{10}\right)$, 準線を $y=-\dfrac{1}{10}$ とする放物線 $y=\dfrac{5}{2}x^2$ を x 軸方向に $-\dfrac{7}{5}$, y 軸方向に $\dfrac{1}{10}$ 平行移動させた $y=\dfrac{5}{2}\left(x+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{1}{10}$ 即ち $y=\dfrac{5}{2}x^2+7x+5$ となる. この放物線を C とする. C を直線 $4x+3y=0$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする. V を求めればよい.

直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+r$ と放物線 $y=\dfrac{5}{2}x^2+7x+5$ が共有点を持つ r の範囲は x の方程式 $\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{25}{3}x+5-r=0$ が実数解を持つときである. $\left(\dfrac{25}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{5}{2}\cdot(5-r)=\dfrac{175}{9}+10r$ であるから $r\geqq-\dfrac{35}{18}$ のとき, またそのときに限り C と直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+r$ は共有点を持つ. C と直線 $y=-\dfrac{4}{3}x$ と直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+r$ とで囲まれた部分を, 直線 $y=-\dfrac{4}{3}x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(r)$ とおく. $-\dfrac{35}{18}\leqq r\leqq 0$ のとき, 直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+r$ を C で切ってできる線分の長さを $h(r)$ とおくと $h(r)=\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{175}{9}+10r}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{175}{9}+10r}=\dfrac{2}{9}\sqrt{90r+175}$.

$h(r)$ は $-\dfrac{35}{18}\leqq r\leqq 0$ の範囲で増加関数であるので $-\dfrac{35}{18}<r<r+h<0$ を満たす r,h に対して

$$\pi\left\{\left(\frac{3r}{5}\right)^2-\left(\frac{3(r+h)}{5}\right)^2\right\}h(r)<V(r)-V(r+h)<\pi\left\{\left(\frac{3r}{5}\right)^2-\left(\frac{3(r+h)}{5}\right)^2\right\}h(r+h).$$

$h(r)$ は連続であるので各辺 h で割って $h\to 0$ とすることにより $V'(r)=\dfrac{18\pi rh(r)}{25}=\dfrac{4\pi}{25}r\sqrt{90r+175}$.

$$V=V\left(-\frac{35}{18}\right)-V(0)=\int_0^{-\frac{35}{18}}\frac{4\pi}{25}r\sqrt{90r+175}\,dr=\frac{4\pi}{25}\int_0^{-\frac{35}{18}}r\sqrt{90r+175}\,dr$$
$$=\frac{4\pi}{25}\int_0^{-\frac{35}{18}}\frac{1}{90}(90r+175)\sqrt{90r+175}\,dr-\frac{4\pi}{25}\int_0^{-\frac{35}{18}}\frac{175}{90}\sqrt{90r+175}\,dr$$
$$=-\frac{4\pi}{25}\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{2}{5}\cdot(175)^{\frac{5}{2}}+\frac{4\pi}{25}\cdot\frac{175}{90}\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{2}{3}\cdot(175)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{25}\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{90}\cdot 2\cdot(175)^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{4\pi}{25}\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{90}\cdot 2\cdot(175)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{15}=\frac{2^4\cdot(5^2\cdot 7)^{\frac{5}{2}}\pi}{3\cdot 5^3\cdot 2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}=\frac{2^4\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot\sqrt{7}\pi}{2^2\cdot 3^5\cdot 5^5}=\frac{2^2\cdot 7^2\sqrt{7}\pi}{3^5}=\frac{196\sqrt{7}\pi}{243}.$$

問題 4　本問では複素数 z が表す複素数平面上の点のことも, 単に点 z と呼ぶことにする. T を複素数平面上の図形,α, β を複素数平面上の点とする. このとき $a+b+c=1, a \neq 0$ を満たす実数の定数 a, b, c に対して $T' = \{az + b\alpha + c\beta | z \in T\}$ とする.

(1)　T が中心 γ, 半径 d の円周であるとき,T' はいかなる図形か.

(2)　T が点 β を通る直線であるとき,T' が T に一致することがあるか. あるならそのような T をすべて求め, ないならないことを証明せよ.

問題 4 の解答　(1)　実数 θ に対して $z = \gamma + d\cos\theta + id\sin\theta$ と定めると $az + b\alpha + c\beta = a\gamma + ad\cos\theta + iad\sin\theta + b\alpha + c\beta$ であるので T' は中心,$a\gamma + b\alpha + c\beta$, 半径 ad の円周である.

(2)　実数 t と複素数 γ に対して $z = \beta + t\gamma$ と定めると $az + b\alpha + c\beta = a\beta + at\gamma + b\alpha + c\beta = b\alpha + (1-b)\beta + at\gamma$. 点 $b\alpha + (1-b)\beta$ は β と α を結ぶ線分を $b : 1-b$ に分ける点であるので, $b \neq 0$ のときは, T が α を通るとき, またそのときに限り T と T' は一致する. $b = 0$ のときは T が β を通るいかなる直線であっても T' と一致する.

問題 5　四角形 ABCD が半径 1 の円に内接していて, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0, \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \overrightarrow{0}$ を満たす. このとき辺 BC の長さを求めよ.

問題 5 の解答　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \overrightarrow{0} \iff \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{3}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \iff \mathrm{AC} \perp \mathrm{BD}$. よって AC と BD の交点を E とすると $\mathrm{EA} = 2\mathrm{CE}, \mathrm{BE} = \mathrm{DE}, \angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{DEC} = \angle\mathrm{CEB} = \dfrac{\pi}{2}$.
$\triangle\mathrm{ABE}$ と $\triangle\mathrm{DCE}$ は 2 角が相等しいので相似, $\triangle\mathrm{DCE}$ と $\triangle\mathrm{BCE}$ は 2 辺とその挟角が相等しいので合同. よって $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ABE} + \angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{ABE} + \angle\mathrm{EDC} = \angle\mathrm{ABE} + \angle\mathrm{EAB} = \pi - \angle\mathrm{BEA} = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ となり AC は四角形 ABCD の外接円の直径. また方冪の定理よりわかる $\mathrm{AE} \cdot \mathrm{EC} = \mathrm{BE} \cdot \mathrm{ED}$ を援用すると三平方の定理より $\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{BE}^2 + \mathrm{CE}^2} = \sqrt{2\mathrm{CE}^2 + \mathrm{CE}^2} = \sqrt{3}\mathrm{CE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

問題 6　無限数列 $f(1), f(2), f(3), \ldots$ は次の (ア)から(ウ) を満たす.

(ア)　任意の正の整数 m, n に対して, $f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つ.

(イ)　任意の正の整数 n に対して, $f(n) < f(n+1)$ が成り立つ.

(ウ)　$f(2) = 2$.

このとき,

(1)　任意の正の整数 n, k に対して, 次のような非負整数 p があることを示せ.　$2^p \leqq n^k < 2^{p+1}$

(2)　任意の正の整数 n に対して, $f(n) = n$ であることを示せ.

問題 6 の解答　(1)　$[k\log_2 n] \leqq k\log_2 n < [k\log_2 n] + 1$ であり $k\log_2 1 \leqq k\log_2 n$ なので $[k\log_2 n] = p$ とおけば p は非負整数. この p に対して $2^p \leqq n^k < 2^{p+1}$.

(2)　(ア),(ウ) より $f(1) = \dfrac{2f(1)}{2} = \dfrac{f(2)f(1)}{2} = \dfrac{f(2 \cdot 1)}{2} = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. もし非負整数 l に対して $f(2^l) = 2^l$ が成り立つなら (ア), (ウ) より $f(2^{l+1}) = f(2^l \cdot 2) = f(2^l)f(2) = 2^l \cdot 2 = 2^{l+1}$ となる. よって数学的帰納法により任意の非負整数 l に対して $f(2^l) = 2^l$ であることが分かった.M が 2 の冪でない非負整数なら奇数 q と非負整数 r を用いて $M = 2^r q$ と書ける. よって奇素数 q に対して $f(q) = q$ であることを示せばよい. $q < f(q)$ であるとすると (1) より $k = \left[\log_{\frac{f(q)}{q}} 2\right]$ とおいたとき $2^p \leqq q^k < 2^{p+1}$ となる非負整数 p が存在するが, $f(2^p) = 2^p, f(2^{p+1}) = 2^{p+1}$ なので (イ) を繰り返し使うことによって $2^p \leqq f(q^k) < 2^{p+1}$. さらに (ア) を繰り返し使うことによって $2^p \leqq f(q)^k < 2^{p+1}$. したがって $q < f(q)$ なる仮定を使えば $\dfrac{1}{2} < \left(\dfrac{q}{f(q)}\right)^k < 1$ となるが,

$$\left(\frac{q}{f(q)}\right)^k = \left(\frac{q}{f(q)}\right)^{\left[\log_{\frac{f(q)}{q}} 2\right]} \geqq \left(\frac{q}{f(q)}\right)^{\log_{\frac{f(q)}{q}} 2} = \left(\frac{q}{f(q)}\right)^{\frac{\log_{\frac{q}{f(q)}} 2}{\log_{\frac{q}{f(q)}} \frac{f(q)}{q}}} = \left(\frac{q}{f(q)}\right)^{\log_{\frac{q}{f(q)}} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$f(q) < q$ を仮定しても同じ矛盾が導かれる.

なお上の解答中で, 実数 x に対して x を超えない最大の整数のことを $[x]$ と記した.