三角関数の公式集

こけｋっこ@軽鬱

厨房時代の産物

基本となる公式は加法定理です。これは絶対に覚えてねん。
その次の 2 倍角，3 倍角，半角の公式は数 3 でよく使うので，
自然と覚えると思います。覚えるのはここまででOKです。
和積，積和は加法定理から導きましょう。(足したり引いたりするだけです‥。)

三角関数を初めて勉強したときは，和積，積和なんかは導いていたんだけど，
2ch やホムペに毎日数式入力していたせいで，脳にへばりついてしまいますた。
公式忘れたぞゴルァ!!って時に見てねん。(＾∀＾ゞ

数 1 でお世話になった公式ども

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 &= 1 \\
1 + (\tan\alpha)^2 &= \frac{1}{(\cos\alpha)^2} \\
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\sin(90^\circ \pm \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp\sin\alpha
\end{aligned}
$$

加法定理

$$
\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

2 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos(2\alpha) &= (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1 - (\tan\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

3 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= 3\sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3 \\
\cos(3\alpha) &= 4(\cos\alpha)^3 - 3\cos\alpha \\
\tan(3\alpha) &= \frac{3\tan\alpha - (\tan\alpha)^3}{1 - 3(\tan\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

半角の公式

$$
\begin{aligned}
\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1 - \cos\alpha}{2} \\
\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1 + \cos\alpha}{2} \\
\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}
\end{aligned}
$$

和積の公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha \pm \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}
\end{aligned}
$$

積和の公式

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}
\end{aligned}$$

名無しさんの公式

下の三角形の式を導くのに使えます。京大で出たような？

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma) &= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \\
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma) &= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ において成り立つ関係式

$\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma\quad(\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\quad\alpha>0,\beta>0,\gamma>0)$ とします。

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma &= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma &= \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \\
(\sin\alpha)^2+(\sin\beta)^2+(\sin\gamma)^2 &= 2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
(\cos\alpha)^2+(\cos\beta)^2+(\cos\gamma)^2 &= 1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma) &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma) &= -1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

2 直線のなす角度

座標平面上に，2 直線 $L1: y=mx+n$, $L2: y=Mx+N$ がある．この 2 直線のなす角を θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とすると，$\tan\theta=|\frac{m-M}{1+mM}|$ となる．

三角形とベクトル

$\triangle ABC$ において，$\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$ とする．
（$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ ）
いま，$\triangle ABC$ の重心を G，内心を I，外心を J，垂心を H とすれば，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\
\overrightarrow{OI} &= \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{CA}| \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{AB}| \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|} \\
&= \frac{(\sin\alpha)\overrightarrow{OA} + (\sin\beta)\overrightarrow{OB} + (\sin\gamma)\overrightarrow{OC}}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \\
\overrightarrow{OJ} &= \frac{\{\sin(2\alpha)\}\overrightarrow{OA} + \{\sin(2\beta)\}\overrightarrow{OB} + \{\sin(2\gamma)\}\overrightarrow{OC}}{\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)} \\
\overrightarrow{OH} &= \frac{(\tan\alpha)\overrightarrow{OA} + (\tan\beta)\overrightarrow{OB} + (\tan\gamma)\overrightarrow{OC}}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}
\end{aligned}$$

が成立する．また，$\triangle ABC$ の内部の点 X に対し，面積比で
$\triangle XBC : \triangle XCA : \triangle XAB = s : t : u$ となるとき，

$$\overrightarrow{OX} = \frac{s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}}{s + t + u}$$

が成立する．