高三スレの問題と解答という罠w

出題者：高三スレ住人

5/?/2003

問題

θ についての関数 $y = (\sin\theta)^2 + \sin\theta + \cos\theta$ （$-\infty < \theta < \infty$）がある.

(1)

$t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t の範囲を答えよ.

(2)

y を t で表わせ.

(3)

y の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

適当な解答

(1)

$$t = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

であり，θ は任意の実数を取るので，$-1 \leq \sin(2\theta) \leq 1$.

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \cdots \text{答}$$

(2)

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1+2t$$

であるから，

$$\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{1+2t}.\quad(\because\quad 1+2t\geq 0)$$

したがって，$\sin\theta,\ \cos\theta$ は, u に関する 2 次方程式 $u^2\mp\{\sqrt{1+2t}\}u+t=0$ の 2 解.

$$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{1+2t}\quad のとき, u^2=\frac{1\pm\sqrt{1-4t^2}}{2}$$

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+2t}\quad のとき, u^2=\frac{1\pm\sqrt{1-4t^2}}{2}$$

となるので，結局,

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4t^2}}{2}\pm\sqrt{1+2t}\quad（複合任意）\cdots 答$$

(3)

最大値を与える y を $f(t)$ とおくと,

$$f(t)=\frac{1+\sqrt{1-4t^2}}{2}+\sqrt{1+2t}\qquad(-\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2})$$

である．同様に最小値を与える y を $g(t)$ とおくと,

$$g(t)=\frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2}-\sqrt{1+2t}\qquad(-\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2})$$

である．よって， $f(t)$ の最大値と $g(t)$ の最小値をそれぞれ求めればよい.

(a)

$$f'(t)=\frac{\sqrt{1-2t}-2t}{\sqrt{1-4t^2}}$$

$$-\frac{1}{2}<t<\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ で\ f'(t)>0,\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4}<t<\frac{1}{2}\ で\ f'(t)<0$$

となるので, $f(t)$ は $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ で極大かつ最大となるので,

$$\begin{aligned} y\text{の最大値} &= f(t)\text{の最大値} \\ &= f(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}) \\ &= \frac{1+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(b)

$$g'(t) = \frac{2t - \sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-4t^2}}$$

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ で } g'(t) < 0, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < t < \frac{1}{2} \text{ で } g'(t) > 0$$

となるので, $g(t)$ は $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ で極小かつ最小となるので,

$$\begin{aligned} y\text{の最小値} &= g(t)\text{の最小値} \\ &= g(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}) \\ &= \frac{1-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdots \text{答} \end{aligned}$$