MMJタン微分基本計算速攻終了コース。

こけkっこ

2002年11月くらい？

MMJタン，大変そうなのでなるべく早く覚えられるようにこんな企画をつくりますた。。これで微分の計算練習でもどうぞ。まず，次のものを覚えて。。

微分の公式

数2でやった微分

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n\text{：自然数})$$

指数関数の微分

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \quad (e\text{：自然対数の底})\\ (a^x)' &= (a^x)\log a \quad (a\text{：正の定数})\end{aligned}$$

対数関数の微分

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \frac{1}{x} \quad (\text{底は } e \text{ です.})\\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x\log a} \quad (a\text{：} 0 < a < 1,\ 1 < a \text{ を満たす定数})\end{aligned}$$

三角関数の微分

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{(\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

積の微分・商の微分

$$
\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}
$$

(例 1)

$$f(x) = (x^2 + 1)(2x + 3) \quad \text{の微分.}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 + 1)'(2x + 3) + (x^2 + 1)(2x + 3)' \\
&= (2x + 1)(2x + 3) + (x^2 + 1) * 2 \\
&= 6x^2 + 8x + 5 \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

(例 2)

$$f(x) = \frac{\sin x}{\log x} \quad \text{の微分.}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\sin x)' \log x - \sin x (\log x)'}{(\log x)^2} \\
&= \frac{\cos x \log x - \frac{\sin x}{x}}{(\log x)^2} \\
&= \frac{x \cos x \log x - \sin x}{x (\log x)^2} \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

合成関数の微分

$$\{f(g(x))\}' = \{f'(g(x))\} * g'(x)$$

こういうのを合成関数の微分公式といいます．かたまりごと微分したら，次はその塊の中身を微分したものをかける，と覚えましょう．

(例 1)

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3 \quad \text{の微分.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 + 3x + 1)^2(x^2 + 3x + 1)' \\ &= 3(x^2 + 3x + 1)^2(2x + 3) \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(例 2)

$$f(x) = \sin\{\cos(\tan x)\} \quad \text{の微分.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 〔\cos\{\cos(\tan x)\}〕\{\cos(\tan x)\}' \\ &= \frac{〔\cos\{\cos(\tan x)\}〕\{-\sin(\tan x)\}}{(\cos x)^2} \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(例 3)

$$f(x) = e^{\sin x + \log(x^2+1)} \quad \text{の微分.}$$

$$f'(x) = e^{\sin x + \log(x^2+1)} \left(\cos x + \frac{2x}{x^2+1}\right) \cdots \text{答}$$

対数微分法

$f(x) = x^x \quad (x > 0)$ という関数はこのままでは微分できません.
こういうものは, $y = x^x$ として, 両辺の対数をとります.

$$\log y = x \log x \cdots \text{ア}$$

このアの両辺を x で微分すると,

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

となります. したがって,

$$y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1) \cdots \text{答}$$

と求まります.

計算練習

次の $f(x)$ を微分せよ. (ちょっとギャグめいているけど $\cdots$)

1.

$$f(x) = \sin x + \cos(2x) + \tan(3x) + \log(4x) + e^{5x} \quad (x > 0)$$

2.

$$f(x) = \log x \sin x \cos x \quad (x > 0)$$

3.

$$f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$$

4.

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\log(x^2+1)}{x^2-x+1}}$$

5.

$$f(x) = \sin〔\sin\{\sin(\log x)\}〕 \quad (x > 0)$$

6.

$$f(x) = x^{x^x} \quad (x > 0)$$

計算練習の答

1.

$$f'(x) = \cos x - 2\sin(2x) + \frac{3}{\{\cos(3x)\}^2} + \frac{1}{x} + 5e^{5x} \cdots 答$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x)' \sin x \cos x + \log x (\sin x)' \cos x + \log x \sin x (\cos x)' \\ &= \frac{\sin x \cos x}{x} + \log x (\cos x)^2 - \log x (\sin x)^2 \\ &= \frac{\sin x \cos x}{x} + (\log x)\{(\cos x)^2 - (\sin x)^2\} \cdots 答 \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} + (\log x)\{\cos(2x)\} \cdots 答 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\{\cos(\cos x)\}(-\sin x)\{\cos(\sin x)\} - \{\sin(\cos x)\}\{-\sin(\sin x)\}(\cos x)}{\{\cos(\sin x)\}^2} \\ &= \frac{-\{\cos(\cos x)\}(\sin x)\{\cos(\sin x)\} + \{\sin(\cos x)\}\{\sin(\sin x)\}(\cos x)}{\{\cos(\sin x)\}^2} \cdots 答 \end{aligned}$$

4.

$$f'(x) \;=\; \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)\{\log(\frac{x^2+1}{x^2-x+1})\}^2} \cdots 答$$

5.

$$f'(x) \;=\; \frac{〔\cos〔\sin\{\sin(\log x)\}〕〕〔\cos\{\sin(\log x)\}〕\{\cos(\log x)\}}{x} \cdots 答$$

6.

$$y = f(x),\ すなわち,\quad y = x^{x^x} \quad とおく.$$

両辺は正なので，対数をとると，

$$\log y = x^x \log x$$

両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (x^x)' \log x + \frac{x^x}{x} \\ &= (x^x)' \log x + x^{x-1} \cdots ア \end{aligned}$$

ここで，$(x^x)'$ を求める．$y = x^x$ とおいて，対数をとると，

$$\log y = x \log x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

よって，$(x^x)' = x^x(\log x + 1) \cdots$ イ　としし，これをアに代入すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{x^x}\{x^x(\log x)(\log x + 1) + x^{x-1}\} \\ &= x^{x^x} x^{x-1}\{x(\log x)(\log x + 1) + 1\} \\ &= x^{x^x + x - 1}\{x(\log x)(\log x + 1) + 1\} \cdots 答 \end{aligned}$$